

ÉLÉMENTS FINIS POUTRE

Etape 1

L'étape 1 consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriés pour l'élément.

Puisqu'on connaît les degrés de liberté de l'élément fini choisi, on peut déterminer le vecteur de déplacement nodal $\{\delta^e\}$ et le vecteur de charge nodale $\{F^e\}$. La matrice de rigidité $[K^e]$ pour cet élément est définie par l'équation 4.1

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \quad (4.1)$$

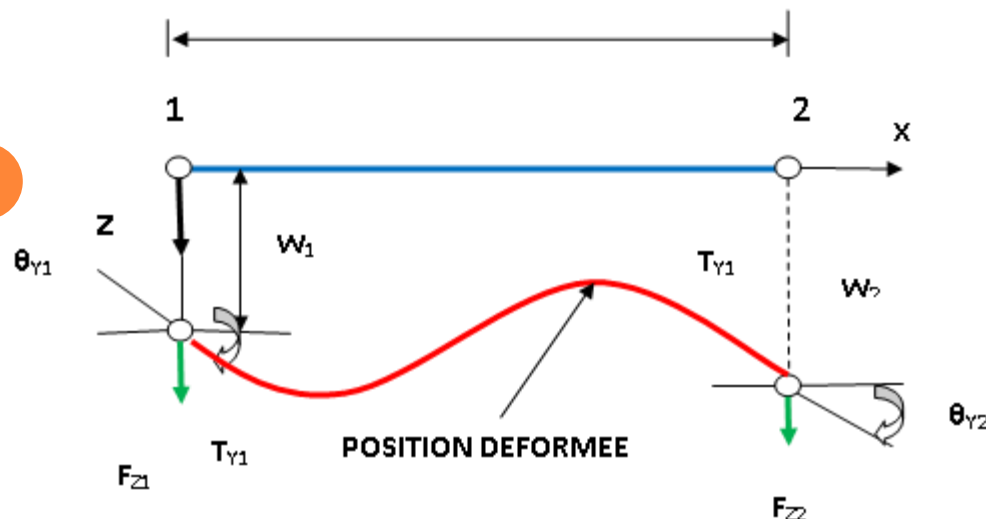


Figure 4.1 Elément poutre déformée

CAS PARTICULIER DE L'ÉLÉMENT POUTRE

On considère un élément poutre avec une section transversale uniforme faisant partie d'une structure continue. Pour un tel élément on peut utiliser le système de coordonnées et la numérotation de la figure 4.1. ou l'axe des y est normal au plan de la figure dans cette figure, les cercles aux extrémités indiquent simplement la position des nœuds et non une quelconque articulation.

Puisqu'on traite le cas de la flexion et si on considère que les déformations axiales sont ignorées cela implique deux déplacements.

- w déplacement normal à la poutre.
- θ Rotation autour de l'axe des y .

Donc le nombre total des degrés de liberté est égale à quatre.

Pour cette étape on peut considérer que le terme degré de liberté à la même signification que déplacement nodaux.

On associe aux déplacements transversal et de rotation à chaque extrémité de l'élément les forces nodales correspondantes le moment T_y et la force de cisaillement F_x

Les vecteurs pour les déplacements et les forces au nœud 1 peuvent être respectivement écrits de la façon suivante

$$\delta_1^e = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad F_1^e = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ T_{y1} \end{Bmatrix}$$

Les vecteurs complets des déplacements nodaux et des charges nodales pour la poutre prennent forme.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1^e\} \\ \{F_2^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ T_{y1} \\ F_{z2} \\ T_{y2} \end{Bmatrix}$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient quatre termes, la matrice de rigidité $[K^e]$ de l'élément est carré d'ordre 4

Etape 2: Choisir des fonctions de déplacement convenable

Cas général

On choisit une fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

Ce modèle peut être représenté d'une manière commode par une **expression polynomiale** et puisque son but est d'exprimer les déplacements $\delta(x, y)$ de n'importe quel point en terme de déplacement nodaux δ^e elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément . L'état des déplacements en chaque point (x , y) de l'élément peut être décrit sous forme matricielle par l'équation (4.2).

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (4.2)$$

Où α est le vecteur colonne des coefficients encore inconnus de la fonction polynôme.

Cas particulier de l'élément poutre

Le déplacement de n'importe quel point de l'élément peut être défini par les deux composantes w et θ_y de déplacement et de rotation.

Ainsi le vecteur déplacement est donné par: $\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \end{Bmatrix}$

Puisque l'élément possède quatre degrés de liberté w_1, θ_{y1}, w_2 et θ_{y2}

quatre coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle de déplacement. Supposons que w soit donné par l'équation 4.3

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad 4.3$$

Où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont des coefficients non encore déterminés. Puisque $\theta_y = \frac{dw}{dx}$

On obtient: $\theta_y = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad 4.4$

A partir des équations (4.3) et (4.4) on obtient le vecteur déplacement $\{\delta(x,y)\}$ donné par l'équation 4.5

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad 4.5$$

Qui définit la matrice $[f(x,y)]$ et le vecteur $\{\alpha\}$ de l'équation 4.2

Etape 3: Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux

Cas général

On exprime maintenant les coefficients de la fonction de déplacement $\{\alpha\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$ et en reportant dans l'équation (4.2) on relie les déplacements des points de l'élément aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

Puisque $\{\delta(x, y)\}$ représente le déplacement au point (x, y) les déplacements nodaux peuvent être obtenus à partir de celui-ci en introduisant simplement les coordonnées nodales convenables dans l'équation (4.2). Cela donne par exemple pour le nœud 1:

$$\{\delta_1^e\} = \{\delta(x_1, y_1)\} = [f(x_1, y_1)]\{\alpha\}$$

En procédant de façon similaire pour tous les autres nœuds, on obtient pour N nœuds par exemple

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \{\delta_3^e\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ \vdots \\ [f(x_n, y_n)] \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

Ou :

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad (4.6)$$

Puisque la matrice $[A]$ est maintenant connue, le vecteur des coefficients inconnus $\{\alpha\}$ peut être obtenu en inversant l'expression de l'équation (4.6)

Cela donne:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^s\} \quad (4.6.1)$$

On remplace $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation (4.2) et on obtient la relation recherchée entre les déplacements $\{\delta(x,y)\}$ de tous les points de l'élément et les déplacements nodaux:

$$[\delta(x,y)] = [f(x,y)][A]^{-1}\{\delta^s\} \quad (4.7)$$

Cas particulier de l'élément poutre

Pour le simple élément poutre figure 4.1 les coordonnées des nœuds sont 0 et L.
L'expression choisie pour définir $[\delta(x,y)]$

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (4.71)$$

$$\theta_y = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

Au nœud 1, $x = 0$

$$w_1 = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \theta_{y1} = \alpha_2$$

Au nœud 2, $x = L$

$$w_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3$$

$$\theta_{y2} = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2$$

Cela donne sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

La matrice $[A]$ est donc définie par la matrice carrée d'ordre 4 de l'équation (4.8) qu'il faut inverser pour obtenir $[A]^{-1}$. A cause de la forme de cette matrice cela peut être aisément réalisé en résolvant le système d'équations. On obtient immédiatement $\alpha_1 = w_1$ et $\alpha_2 = \theta_{y1}$ il reste à résoudre les équations restantes pour obtenir:

$$\alpha_3 = \frac{3}{L^2}(-w_1 + w_2) - \frac{1}{L}(2\theta_{y1} + \theta_{y2}) \quad \alpha_4 = \frac{2}{L^2}(w_1 - w_2) - \frac{1}{L^2}(\theta_{y1} + \theta_{y2})$$

Ces résultats mis sous forme matricielle donnent:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

La matrice $[A]^{-1}$ correspond à la matrice d'ordre 4 de l'équation (4.9).

Etape 4 : Relations entre déplacement et déformations.

Cas général

On relie maintenant les déformations $\epsilon(x,y)$ du point (x , y) de l'élément aux déplacements $\delta(x,y)$ et donc aussi aux déplacement nœuds $\{\delta^e\}$.

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forma exacte dépend du type de problème traité. Par exemple , pour un problème d'élasticité plane ,les déformations corresponde aux dérivées premières des déplacements, tandis que pour des problèmes de flexion , les déformations sont associées à la courbure de l'élément et correspondant aux dérivées secondes. En général

$$[\epsilon(x,y)] = [différentielle de \delta(x,y)]$$

On obtient la forme exacte de cette expression pour chaque classe de problème à partir de la théorie d'élasticité. En utilisant l'expression de l'équation (461) pour $\{\delta(x, y)\}$ et en remarquant que $[A]^{-1}$ et $\{\delta^e\}$ sont indépendants de x et y , le vecteur de déformation $\{\epsilon(x, y)\}$ est donné par :

$$[\epsilon(x, y)] = [\text{différentielle de } f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\}$$

En posant la matrice différentielle de $f(x, y)$ égale à $[C]$ cette équation peut être écrite de la manière suivante:

$$[\epsilon(x, y)] = [C][A]^{-1}\{\delta^e\}$$

Où en général $[C]$ contient les termes en x et y .

C'est la relation cherchée entre les déformations en chaque point de l'élément et les déplacements nodaux. Avec:

$$[C][A]^{-1} = [B]$$

Cette relation devient:

$$[\epsilon(x, y)] = [B]\{\delta^e\} \quad (4.10)$$

Cas particulier de l'élément poutre.

Dans ce cas la seule 'déformation' à considérer est la courbure autour de l'axe des y.
Donc à partir de l'équation (471) le vecteur déformation est donné par:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \frac{-d^2 w}{dx^2} = -2\alpha_3 - 6\alpha_4 x$$

Sous forme matricielle

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

On a établi à l'étape 3 que $\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\}$. En remplaçant $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation (4.11) on obtient alors:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne après multiplication matricielle:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} - \frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

On a ainsi obtenu la matrice $[B]$ de l'équation (4.10) .

Etape 5 :Relation entre déformations et contraintes:

Cas général:

Les contraintes internes à l'élément $\{\sigma(x, y)\}$ sont maintenant reliées aux déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$.

Puisque l'on connaît déjà une relation entre les déformations internes et les déplacements nodaux $\{\delta^e\}$,on peut relier les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ à ces derniers. Dans cette étape on considère les propriétés élastiques de l'élément en général.

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\varepsilon(x, y)\}$$

Ou $[D]$ est la matrice d'élasticité et contient les propriétés élastiques de l'élément , c'est-à-dire des quantités telles que le module d'Young d' élasticité transversale E et le coefficient de poisson ν . Puisque l'on connaît à partir de l'équation (4.10) que

$$[\varepsilon(x, y)] = [B]\{\delta^e\}$$

Alors on aura

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (4.12)$$

Cas particulier de l'élément poutre:

Dans ce cas les contraintes $\{\sigma(x, y)\}$ et les déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$ correspondent au moment interne dans la poutre M_y et à la courbure $\frac{-d^2w}{dx^2}$. Ainsi:

$$M_y = -EI \frac{d^2w}{dx^2}$$

On remarque que cette relation est obtenue à l'aide de la simple théorie de la flexion des poutres, c'est-à-dire $\frac{M}{I} = \frac{f}{y} = \frac{E}{R}$ ou la courbure $\frac{1}{R}$ est approximée par $\frac{-d^2w}{dx^2}$.

Donc dans ce cas particulier, la matrice $[D]$ contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion de EI cependant en général, $[D]$ est d'ordre plus élevé. L'équation (4.12) devient donc:

$$\{\sigma(x, y)\} = [EI] \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} - \frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}$$

Etape 6 relier les charges nodales aux déplacements nodaux.

Cas général:

Les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ sont maintenant remplacées par les charges nodales $\{F^e\}$ Statiquement équivalentes et ces dernières sont reliées aux déplacements nodaux, définissant ainsi la matrice de rigidité $[K^e]$ de l'élément.

On utilise le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales qui est statiquement équivalent aux contraintes internes. La condition d'équivalence peut être exprimée comme suit:

durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes.

On choisit un ensemble arbitraire de déplacement nodaux représenté par le vecteur $\{\delta^{*e}\}$

$$\{\delta^{*e}\} = \begin{Bmatrix} \delta_1^{*e} \\ \delta_2^{*e} \\ \delta_3^{*e} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_n^{*e} \end{Bmatrix}$$

Le travail extérieur w_{ex} des forces nodales est donné par:

$$W_{ex} = \{\delta_1^{*e}\}\{F_1^e\} + \{\delta_2^{*e}\}\{F_2^e\} + \dots \dots \dots + \{\delta_n^{*e}\}\{F_n^e\} = \{\delta^{*e}\}^T \{F^e\}$$

Si les déplacements arbitraires imposés produisent des déformations $\{\epsilon(x,y)^*\}$ aux points de l'élément ou les contraintes réelles sont les $\{\sigma(x,y)\}$, alors le travail interne par unité de volume est donné par:

$$W_{int} = \{\epsilon(x,y)^*\}^T \{\sigma(x,y)\}$$

et le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c'est-à-dire :

$$\int^v W_{int} d(vol) = \int^v \{\epsilon(x,y)^*\}^T \{\sigma(x,y)\} d(vol)$$

Maintenant , on sait par **l'équation (4.10)** que les déformations en chaque point de l'élément sont exprimées en fonction des déplacements nodaux par

$$[\epsilon(x,y)] = [B]\{\delta^e\}$$

D'où les $\{\delta^{*e}\}$ étant imposés, les déformations correspondantes s'exprime par:

$$\{\epsilon(x,y)^*\} = [B]\{\delta^{*e}\}$$

De plus l'équation (4.12) relie les contraintes réelles dans l'élément aux déplacements nodaux par:

$$\{\sigma(x,y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

Donc on peut remplacer par leur valeur ces expressions dans l'équation des travaux virtuels pour le travail interne et on obtient:

$$\int^v W_{int} d(vol) = \int^v [B]^T \{\delta^{*e}\} [D][B] \{\delta^e\} d(vol)$$

Et

$$W_{ex} = \{\delta^{*e}\}^T \{F^e\}$$

L'opération finale consiste à évaluer travail interne et travail externe produits pendant les déplacements virtuels est valide pour n'importe quel système de déplacements appliqué, on peut choisir ce dernier comme l'on veut. Dans ce cas, il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité. On obtient alors

$$\{F^e\} = \left[\int^v [B]^T [D][B] d(vol) \right] \{\delta^e\} \quad (4.13)$$

En comparant l'équation (4.13) avec l'équation 1 écrite à nouveau ci-dessous

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\}$$

Il est clair que la matrice $[K^e]$ de l'élément est donnée par l'expression

$$[K^e] = \int^v [B]^T [D][B] d(vol)$$

Donc , pour évaluer la matrice de rigidité de l'élément dans le cas général, il est nécessaire de calculer la matrice $[B]$ donnée par l'étape 4 à partir des matrices $[A]^{-1}$ et $[C]$ et la matrice $[D]$ donnée par l'étape 5 , puis il suffit de faire les multiplications et les intégrations définies par l'équation 6.

Cas particulier de l'élément poutre

L'équation 4 a été établi dans le cas général pour lequel il faut intégrer le produit des contraintes et des déformations interne sur tout le volume de l'élément afin d'obtenir le travail interne total effectué durant le déplacement virtuel . Pour le cas particulier d'un élément poutre , les contraintes internes $\sigma(x, y)$ correspondent au moment par unité de longueur M_y de telle sorte qu'il faut intégrer le produit de ce dernier et de la courbure qui lui est associé sur la longueur totale de l'élément afin d'évaluer le travail interne total. L'expression